

Fit 하는 순간, 오답도 실력이 된다!

이지수능교육(ezeducation)

고3 2022년 11월
수학미적 오답노트플러스

이지오답핏



■ 문항별 분석

[illegible]

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 15번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 수열 | 수학적 귀납법 | 기타 점화식

001 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 a_9 의 최댓값과 최솟값을 각각 M , m 이라 할 때, $M+m$ 의 값은?

(가) $a_7 = 40$ (나) 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1} \text{이 } 3 \text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216

② 218

③ 220

④ 222

⑤ 224

§ 출전 : 고3 2020년 09월 평가원 수학과형 21번

002 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \leq a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$ 을 만족시킨다. $a_3 = 2$, $a_6 = 19$ 가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

§ 출전 : 고3 2021년 09월 평가원 수학확통 15번

003 수열 $\{a_n\}$ 은 $|a_1| \leq 1$ 이고, 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$ 이고 $\sum_{k=1}^5 a_k > 0$ 이 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학확통 21번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 지수함수와 로그함수 | 지수,로그 함수 통합 | 지수, 로그함수의 그래프의 활용

004 자연수 n 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x) = \begin{cases} |3^{x+2} - n| & (x < 0) \\ |\log_2(x+4) - n| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t 에 대하여 x 에 대한 방정식 $f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$ 라 할 때, 함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 값의 합을 구하시오.

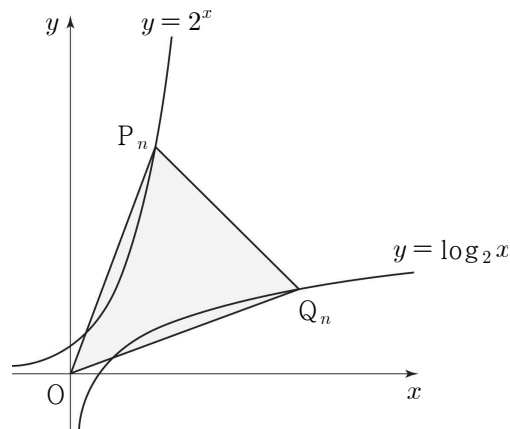
§ 출전 : 고3 2017년 04월 학력평가 수학가형 29번

005 좌표평면에서 2 이상의 자연수 n 에 대하여 두 곡선 $y = 3^x - n$, $y = \log_3(x + n)$ 으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x 좌표와 y 좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 4가 되도록 하는 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

§ 출전 : 고3 2014년 04월 학력평가 수학A형 19번

006 그림과 같이 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 곡선 $y = 2^x$ 위를 움직이는 점 $P_n(n, 2^n)$ 이 있다. 점 P_n 을 지나고 기울기가 -1 인 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 하자.

삼각형 $P_n O Q_n$ 의 넓이를 S_n 이라 할 때, $2 \sum_{n=1}^5 S_n$ 의 값은? (단, O 는 원점이다.) [4점]



- ① 1309 ② 1311 ③ 1313 ④ 1315 ⑤ 1317

나의 오답 문항

고3 2022년 수능 수학미적 29번

이게 바로 핵심이야!

왜 틀렸지?

이것만은 기억하자!

문제

§ 세부단원정보 : 적분법 | 여러 가지 적분법 | 정적분으로 표시된 함수의 극한: 초월함수

007 세 상수 a, b, c 에 대하여 함수 $f(x) = ae^{2x} + be^x + c$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) + 6}{e^x} = 1$$

$$(나) f(\ln 2) = 0$$

함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $\int_0^{14} g(x)dx = p + q\ln 2$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 유리수이고, $\ln 2$ 는 무리수이다.)

§ 출전 : 고3 2021년 10월 학력평가 수학기적 29번

008 함수 $f(x) = \sin(ax) (a \neq 0)$ 에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 a 의 값의 합을 구하시오.

$$(가) \int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x) dx \geq \frac{1}{2}$$

$$(나) 0 < t < 1 \text{인 모든 실수 } t \text{에 대하여 } \int_0^{3\pi} |f(x) + t| dx = \int_0^{3\pi} |f(x) - t| dx \text{이다.}$$

§ 출전 : 고3 2019년 10월 학력평가 수학기형 30번

009 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

$$(가) g(x+1) - g(x) = -\pi(e+1)e^x \sin(\pi x)$$

$$(나) g(x+1) = \int_0^x \{f(t+1)e^t - f(t)e^t + g(t)\} dt$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{10}{9}e + 4 \text{ 일 때, } \int_1^{10} f(x) dx \text{의 값을 구하시오. [4점]}$$



정답과 해설

1 정답 ⑤

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 a_9 의 최댓값과 최솟값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) a_6 이 3의 배수인 경우

$$a_7 = 40 \text{이므로}$$

$$\frac{a_6}{3} = a_7$$

$$a_6 = 3a_7 = 3 \times 40 = 120$$

$a_7 = 40$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$$

$a_8 = 160$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$$

(ii) $a_6 = 3k - 2$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6$$

$$= 40 - (3k - 2)$$

$$= 42 - 3k$$

$$= 3(14 - k)$$

a_5 는 자연수이므로

$$3(14 - k) > 0 \text{에서}$$

$$k < 14$$

한편, a_5 는 3의 배수이므로

$$a_6 = \frac{a_5}{3}$$

$$\text{즉, } 3k - 2 = \frac{3(14 - k)}{3} \text{에서}$$

$$4k = 16$$

$$k = 4$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 4 - 2 = 10$$

이므로

$$a_8 = a_6 + a_7$$

$$= 10 + 40$$

$$= 50$$

$a_8 = 50$ 이 3의 배수가 아니므로

$$a_9 = a_7 + a_8$$

$$= 40 + 50$$

$$= 90$$

(iii) $a_6 = 3k - 1$ (k 는 자연수)인 경우

$$a_5 + a_6 = a_7$$

$$a_5 = a_7 - a_6$$

$$= 40 - (3k - 1)$$

$$= 41 - 3k$$

a_5 는 자연수이므로

$$41 - 3k > 0 \text{에서}$$

$$k < \frac{41}{3} \dots\dots \textcircled{7}$$

한편, a_5 는 3의 배수가 아니므로

$$a_4 + a_5 = a_6 \text{에서}$$

$$a_4 = a_6 - a_5$$

$$= (3k - 1) - (41 - 3k)$$

$$= 6k - 42$$

$$= 3(2k - 14)$$

a_4 가 자연수이므로

$$3(2k - 14) > 0 \text{에서}$$

$$k > 7 \dots\dots \textcircled{8}$$

$\textcircled{7}$, $\textcircled{8}$ 에서

$$7 < k < \frac{41}{3}$$

한편, a_4 는 3의 배수이므로

$$a_5 = \frac{a_4}{3}$$

$$\text{즉, } 41 - 3k = \frac{3(2k - 14)}{3} \text{에서}$$

$$5k = 55$$

$$k = 11$$

따라서

$$a_6 = 3 \times 11 - 1 = 32$$

이므로

$$a_8 = a_6 + a_7$$

$$= 32 + 40$$

$$= 72$$

$a_8 = 72$ 가 3의 배수이므로

$$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

(i), (ii), (iii)에서 a_9 의 최댓값은 $M = 200$ 이고 최솟값은 $m = 24$ 이다.

따라서

$$M + m = 200 + 24 = 224$$

2 정답 ②

출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열의 첫째항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i) $a_1 \leq a_2$ 일 때,

$$a_3 = 2a_1 + a_2 = 2 \dots\dots \textcircled{9}$$

이므로

$$a_2 > 0$$

① $a_1 \geq 0$ 일 때

$a_2 \leq a_3$ 이므로

$$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$$

$a_3 \leq a_4$ 이므로

$$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$$

$a_4 \leq a_5$ 이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$$

이때, $a_6 = 19$ 이므로

$$6a_2 + 10 = 19$$

$$a_2 = \frac{3}{2}$$

$a_2 = \frac{3}{2}$ 을 ㉠에 대입하면

$$2a_1 + \frac{3}{2} = 2$$

$$a_1 = \frac{1}{4}$$

② $a_1 < 0$ 일 때

$a_2 > a_3$ 이므로

$$a_4 = a_2 + a_3 = a_2 + 2$$

$a_3 \leq a_4$ 이므로

$$a_5 = 2a_3 + a_4 = a_2 + 6$$

$a_4 \leq a_5$ 이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 3a_2 + 10$$

이때, $a_6 = 19$ 이므로

$$3a_2 + 10 = 19$$

$$a_2 = 3$$

$a_2 = 3$ 을 ㉠에 대입하면

$$2a_1 + 3 = 2$$

$$a_1 = -\frac{1}{2}$$

(ii) $a_1 > a_2$ 일 때

$$a_3 = a_1 + a_2 = 2$$

..... ㉡

이므로

$$a_1 > 0$$

$a_2 \leq a_3$ 이므로

$$a_4 = 2a_2 + a_3 = 2a_2 + 2$$

① $a_2 \geq 0$ 일 때

$a_3 \leq a_4$ 이므로

$$a_5 = 2a_3 + a_4 = 2a_2 + 6$$

$a_4 \leq a_5$ 이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 10$$

이때, $a_6 = 19$ 이므로

$$6a_2 + 10 = 19$$

$$a_2 = \frac{3}{2}$$

$a_2 = \frac{3}{2}$ 을 ㉡에 대입하면

$$a_1 + \frac{3}{2} = 2$$

$$a_1 = \frac{1}{2}$$

이때, $a_1 < a_2$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_1 의 값은 존재하지 않는다.

② $a_2 < 0$ 일 때

$a_3 > a_4$ 이므로

$$a_5 = a_3 + a_4 = 2a_2 + 4$$

$a_4 \leq a_5$ 이므로

$$a_6 = 2a_4 + a_5 = 6a_2 + 8$$

이때, $a_6 = 19$ 이므로

$$6a_2 + 8 = 19$$

$$a_2 = \frac{11}{6}$$

이때, $a_2 > 0$ 이므로 주어진 조건을 만족시키는 a_2 와 a_1 의 값은 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서

$$a_1 = \frac{1}{4} \text{ 또는 } a_1 = -\frac{1}{2}$$

따라서 모든 a_1 의 값의 합은

$$\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

3 정답 ①

출제의도 : 수열의 귀납적 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 첫째항을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

먼저 a_5 의 값을 구해 보자.

$$-1 \leq a_5 < -\frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = -2a_5 - 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{ 에서 } -a_5 - 2 = 0$$

즉, $a_5 = -2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

$$-\frac{1}{2} \leq a_5 \leq \frac{1}{2} \text{ 이면 } a_6 = 2a_5 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{ 에서 } 3a_5 = 0$$

즉, $a_5 = 0$

$$\frac{1}{2} < a_5 \leq 1 \text{ 이면 } a_6 = -2a_5 + 2 \text{ 이므로}$$

$$a_5 + a_6 = 0 \text{ 에서 } -a_5 + 2 = 0$$

즉, $a_5 = 2$ 이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

그러므로 $a_5 = 0$ 이고 이때 $a_4 = -1$ 또는 $a_4 = 0$ 또는 $a_4 = 1$ 이다.

한편 $0 \leq a_{n+1} \leq 1$ 일 때

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n+1} \text{ 또는 } a_n = 1 - \frac{1}{2}a_{n+1}$$

(i) $a_4 = -1$ 인 경우

$a_3 < 0$, $a_2 < 0$, $a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_4 = 0$ 인 경우

㉠ $a_3 = -1$ 인 경우

$a_2 < 0$, $a_1 < 0$ 이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3 = 0$ 인 경우

$a_2 = 0$ 또는 $a_2 = 1$ 이고,

$a_2 = 0$ 일 때 $a_1 = 1$ 이면 조건을 만족시키고, $a_2 = 1$

일 때 $a_1 = \frac{1}{2}$ 이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉠ $a_3 = 1$ 인 경우

$a_2 = \frac{1}{2}$ 이고 이때 $a_1 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_1 = \frac{3}{4}$ 이며, 이것은 조건을 만족시킨다.

(iii) $a_4 = 1$ 인 경우

$a_3 = \frac{1}{2}$ 이고 이때 $a_2 = \frac{1}{4}$ 또는 $a_2 = \frac{3}{4}$

㉡ $a_2 = \frac{1}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{1}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{7}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_2 = \frac{3}{4}$ 인 경우

$a_1 = \frac{3}{8}$ 또는 $a_1 = \frac{5}{8}$ 이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{8} + \frac{7}{8} + \frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{9}{2}$$

4 정답 33

출제의도 : 지수함수의 그래프와 로그함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

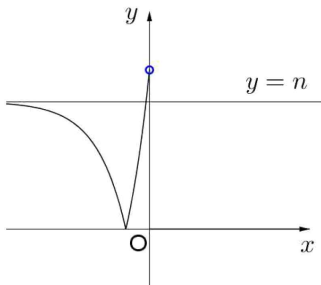
정답풀이 :

함수 $y = 3^{x+2} - n$ 의 그래프는 함수 $y = 3^x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

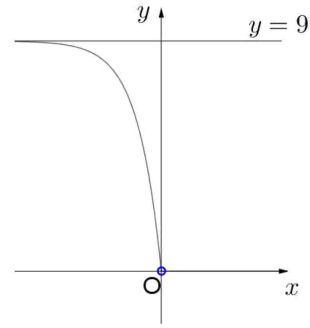
함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |9 - n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $y = n$ 이다.

$x < 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |3^{x+2} - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

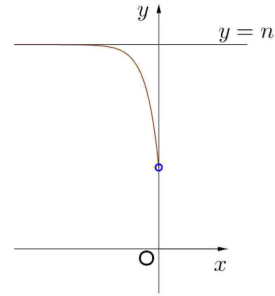
$1 \leq n < 9$ 일 때,



$n = 9$ 일 때,



$n > 9$ 일 때,

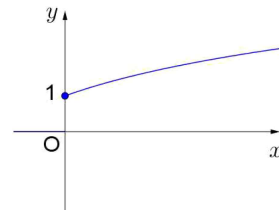


또, 함수 $y = \log_2(x+4) - n$ 의 그래프는 함수 $y = \log_2 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -4 만큼, y 축의 방향으로 $-n$ 만큼 평행 이동한 그래프이다.

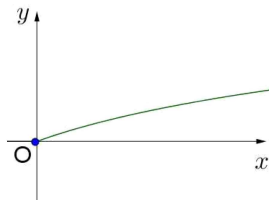
함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 점 $(0, |2 - n|)$ 을 지나고 점근선의 방정식은 $x = -4$ 이다.

$x \geq 0$ 일 때, 자연수 n 의 값에 따른 함수 $y = |\log_2(x+4) - n|$ 의 그래프는 다음과 같다.

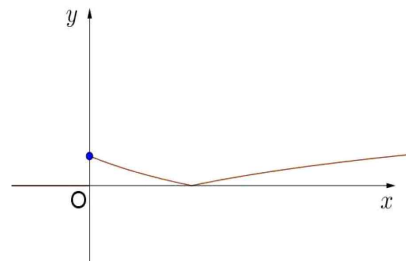
$n = 1$ 일 때,



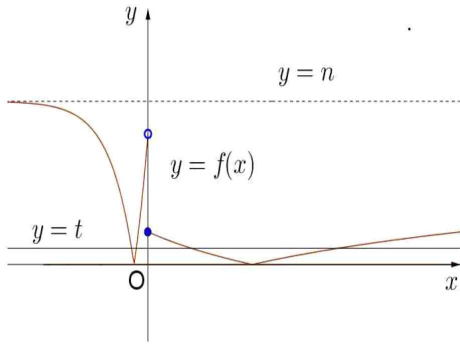
$n = 2$ 일 때각,



$n > 2$ 일 때,



x 에 대한 방정식 $f(x) = t$ 의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$ 는 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 직선 $y = t$ 가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$ 의 최댓값이 4이므로
 $9-n > 0$ 이고 $2-n < 0$ 이어야 한다.
 즉, $2 < n < 9$ 이다.
 따라서 자연수 n 의 값은
 3, 4, 5, 6, 7, 8
 이고, 그 합은
 $3+4+5+6+7+8=33$
 이다.

5 [정답] 16

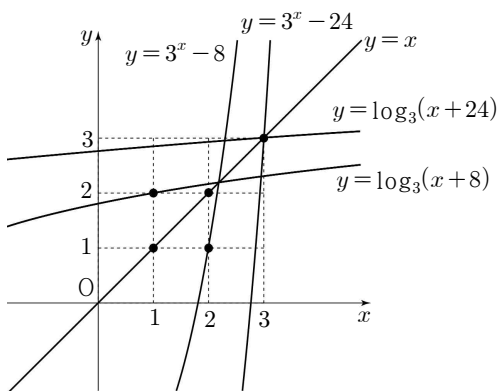
[출제의도] 지수함수와 로그함수의 그래프를 활용하여 추론하기

두 곡선 $y=3^x-n$, $y=\log_3(x+n)$ 은 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이므로 점 (a, b) 가 주어진 영역에 포함되면 점 (b, a) 도 포함된다.
 영역의 내부 또는 경계에 포함되는 점의 개수가 4일 때의 네 점은 $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ 이다.
 $f(x)=3^x-n$ 이라 할 때, $f(2) \leq 1$, $f(3) > 3$ 이어야 한다.

$$3^2-n \leq 1, 3^3-n > 3$$

$$\therefore 8 \leq n < 24$$

따라서 자연수 n 의 개수는 16



6 [정답] ①

[출제의도] 여러 가지 수열을 활용하여 문제해결하기

함수 $y=\log_2 x$ 는 함수 $y=2^x$ 의 역함수이므로
 점 Q_n 의 좌표는 $(2^n, n)$
 직선 P_nQ_n 의 방정식은 $x+y-2^n-n=0$ 이고,

원점 O 와 직선 P_nQ_n 사이의 거리는 $\frac{2^n+n}{\sqrt{2}}$,

선분 P_nQ_n 의 길이는 $\sqrt{2}(2^n-n)$ ($\because 2^n > n$)

$$\begin{aligned} \therefore S_n &= \frac{1}{2} \times \frac{2^n+n}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}(2^n-n) \\ &= \frac{4^n-n^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{따라서 } 2 \sum_{n=1}^5 S_n = \sum_{n=1}^5 (4^n-n^2)$$

$$= \frac{4(4^5-1)}{4-1} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$$

$$= 1309$$

7 정답 26

출제의도 : 여러 가지 조건을 만족시키는 함수를 구한 후 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)+6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ae^{2x}+be^x+c+6}{e^x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(ae^x + b + \frac{c+6}{e^x} \right) = 1$$

따라서, $b=1$, $c=-6$ 이므로

$$f(x)=ae^{2x}+e^x-6$$

조건 (나)에서

$$f(\ln 2)=ae^{2\ln 2}+e^{\ln 2}-6=4a+2-6=0$$

$$a=1$$

$$\text{즉, } f(x)=e^{2x}+e^x-6$$

따라서,

$$f(\ln 4)=e^{2\ln 4}+e^{\ln 4}-6=16+4-6=14$$

이므로

$$g(0)=\ln 2, g(14)=\ln 4$$

$$\text{따라서, } \int_0^{14} g(x)dx \text{에서 } g(x)=t \text{로 놓으면 } g'(x)=\frac{dt}{dx}$$

이고

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{f'(t)}$$

이므로

$$\int_0^{14} g(x)dx$$

$$= \int_{\ln 2}^{\ln 4} tf'(t)dt$$

$$= [tf(t)]_{\ln 2}^{\ln 4} - \int_{\ln 2}^{\ln 4} f(t)dt$$

$$= 14\ln 4 - \int_{\ln 2}^{\ln 4} (e^{2t}+e^t-6)dt$$

$$\begin{aligned}
&= 14\ln 4 - \left[\frac{1}{2}e^{2t} + e^t - 6t \right]_{\ln 2}^{\ln 4} \\
&= 28\ln 2 - (8 - 6\ln 2) \\
&= 34\ln 2 - 8 \\
&\text{따라서 } p = -8, q = 34 \text{ 이므로} \\
&p + q = 26
\end{aligned}$$

8 [정답] 14

[출제의도] 정적분의 성질과 삼각함수의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.

조건 (가)에서

$$\int_0^{\frac{\pi}{a}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{a}} \sin(ax) dx$$

$$= \left[-\frac{1}{a} \cos(ax) \right]_0^{\frac{\pi}{a}} = \frac{2}{a}$$

$$\frac{2}{a} \geq \frac{1}{2} \text{ 이므로}$$

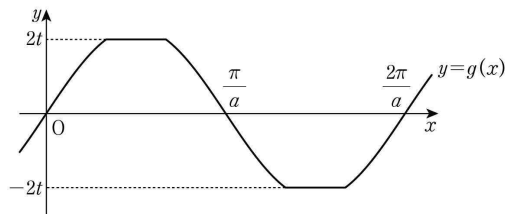
$$0 < a \leq 4 \dots\dots \textcircled{7}$$

조건 (나)에서

$$\int_0^{3\pi} \{ |f(x)+t| - |f(x)-t| \} dx = 0$$

$g(x) = |f(x)+t| - |f(x)-t|$ 라 하면

$$g(x) = \begin{cases} -2t & (-1 \leq \sin(ax) < -t) \\ 2\sin(ax) & (-t \leq \sin(ax) < t) \\ 2t & (t \leq \sin(ax) \leq 1) \end{cases}$$



함수 $t = g(x)$ 의 그래프가 그림과 같으므로

$0 < k < \frac{2\pi}{a}$ 인 모든 실수 k 에 대하여

$$\int_0^k g(x) dx > 0 \text{ 이고, } \int_0^{\frac{2\pi}{a}} g(x) dx = 0 \text{ 이다.}$$

함수 $g(x)$ 는 주기가 $\frac{2\pi}{a}$ 이고 $\int_0^{3\pi} g(x) dx = 0$ 이므로

$$3\pi = \frac{2\pi}{a} \times n \quad (n \text{은 자연수}), \quad a = \frac{2}{3}n$$

$$\textcircled{7} \text{에서 } 0 < \frac{2}{3}n \leq 4$$

따라서 구하는 모든 실수 a 의 값은

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}, \frac{10}{3}, 4 \text{ 이므로 그 합은 } 14 \text{ 이다.}$$

9 [정답] 26

[출제의도] 치환적분법과 부분적분법을 이용하여 정적분에 대한 문제를 해결한다.

(나)에서 $x=0$ 일 때 $g(1)=0$

$$g(x+1) = \int_0^x \{ f(t+1)e^t - f(t)e^t + g(t) \} dt \text{의 양변을}$$

x 에 대하여 미분하여 정리하면

$$f(x+1) - f(x) = \{ g'(x+1) - g(x) \} e^{-x}$$

임의의 실수 t 에 대하여

$$\int_0^t \{ f(x+1) - f(x) \} dx = \int_0^t \{ g'(x+1) - g(x) \} e^{-x} dx$$

$$\text{(좌변)} = \int_0^t f(x+1) dx - \int_0^t f(x) dx$$

$$= \int_1^{t+1} f(x) dx - \int_0^t f(x) dx$$

$$= \int_t^{t+1} f(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \dots\dots \textcircled{9}$$

$$\text{(우변)} = \int_0^t \{ g'(x+1) - g(x) \} e^{-x} dx$$

$$= \int_0^t g'(x+1) e^{-x} dx - \int_0^t g(x) e^{-x} dx$$

$$\int_0^t g'(x+1) e^{-x} dx \text{에서}$$

$$\int_0^t g'(x+1) e^{-x} dx$$

$$= \left[g(x+1) e^{-x} \right]_0^t + \int_0^t g(x+1) e^{-x} dx$$

$$\text{(우변)} = \left[g(x+1) e^{-x} \right]_0^t + \int_0^t \{ g(x+1) - g(x) \} e^{-x} dx$$

$$= g(t+1) e^{-t} - g(1) - \int_0^t \pi(e+1) \sin(\pi x) dx$$

$$= g(t+1) e^{-t} + \left[(e+1) \cos(\pi x) \right]_0^t$$

$$= g(t+1) e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) - (e+1) \dots\dots \textcircled{10}$$

$\textcircled{9}, \textcircled{10}$ 에서

$$\int_t^{t+1} f(x) dx$$

$$= \int_0^1 f(x) dx + g(t+1) e^{-t} + (e+1) \cos(\pi t) - (e+1)$$

$$g(x+1) = g(x) - \pi(e+1) \sin(\pi x) e^x \text{에서}$$

$$g(0) = g(1) = g(2) = \dots = g(9) = 0$$

$$\int_1^{10} f(x) dx = \sum_{n=1}^9 \int_n^{n+1} f(x) dx$$

$$= \sum_{n=1}^9 \left\{ \int_0^1 f(x) dx + g(n+1) e^{-n} + (e+1) \cos(\pi n) - (e+1) \right\}$$

$$= 9 \int_0^1 f(x) dx + 0 + (e+1) \sum_{n=1}^9 \{ \cos(\pi n) - 1 \}$$

$$= 9 \left(\frac{10}{9} e + 4 \right) + (e+1) \times (-10) = 26$$